41 再談佩爾方程式

定理 41.1(佩爾方程式)　如果正整數 s 不是完全平方數則證明：可以找到正整數數對 (x,y) 使得

$$x^2-sy^2=1.$$

【證明】由**定理 40.3** 知道：可以找到無窮多的正整數序對 (x,y) 使得

$$x^2-sy^2=p,$$

其中 p 為滿足 $|p|\le 1+2\sqrt{s}$ 的整數。因此可以找到兩組不相同的正整數序對

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 滿足

$$\begin{cases} x_1^2-sy_1^2=x_2^2-sy_2^2=p \\ x_1\equiv x_2 \pmod p; y_1\equiv y_2 \pmod p \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x_1x_2-sy_1y_2}{p}\right)^2-s\left(\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{p}\right)^2=1 \\ \dfrac{x_1x_2-sy_1y_2}{p} \text{ 與 } \dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{p} \text{ 為整數}. \end{cases}$$

如果 $x_1y_2-x_2y_1=0$，則令

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=n.$$

推得

$$p=x_1^2-sy_1^2=n^2(x_2^2-sy_2^2)=n^2p\Rightarrow n=1.$$

此與 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是兩組不相同的正整數數對矛盾。因此

$$\begin{cases} x = \left| \dfrac{x_1x_2 - sy_1y_2}{p} \right| \\ y = \left| \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{p} \right| \end{cases} \qquad x, y \text{ 為正整數且滿足 } x^2 - sy^2 = 1.$$

所以存在正整數序對(x, y)使得

$$x^2 - sy^2 = 1.$$

現在假設(a, b)是離原點最近且滿足$x^2 - sy^2 = 1$的正整數解，我們想證明：所有方程式$x^2 - sy^2 = 1$上的正整數解(x, y)都有如下的形式

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n.$$

定理 41.2　若(x, y)是方程式$x^2 - sy^2 = 1$上的正整數解，則證明可以找到一個正整數n使得

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n.$$

【證明】假設(x, y)是不能表為

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n$$

的形式且離原點最近的正整數解。顯然我們有$x > a > 1; y > b$。現在我們考慮整數數對(x_0, y_0)如下：

$$\begin{aligned} x_0 + y_0\sqrt{s} &= \frac{x + y\sqrt{s}}{a + b\sqrt{s}} \\ &= (x + y\sqrt{s})(a - b\sqrt{s}) \\ &= (ax - bys) + (ay - bx)\sqrt{s}. \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} x_0^2 - sy_0^2 &= (ax - bys)^2 - s(ay - bx)^2 \\ &= (a^2 - sb^2)x^2 - s(a^2 - sb^2)y^2 \\ &= x^2 - sy^2 = 1. \end{aligned}$$

再由

$$\begin{aligned} x_0 &= ax - bys \\ &= \frac{a^2x^2 - b^2y^2s^2}{ax + bys} \\ &= \frac{(a^2 - sb^2)x^2 + sb^2(x^2 - sy^2)}{ax + bys} \\ &= \frac{x^2 + sb^2}{ax + bys} > 0 \\ y_0 &= ay - bx \\ &= \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{ay + bx} \\ &= \frac{-b^2(x^2 - sy^2) + (a^2 - sb^2)y^2}{ay + bx} \\ &= \frac{y^2 - b^2}{ay + bx} > 0 \text{ (因為 } y > b) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -(a-1)x + bys \\ &= \frac{-(a-1)^2x^2 + b^2y^2s^2}{(a-1)x + bys} \\ &= \frac{-sb^2(x^2 - sy^2) + [sb^2 - (a^2 - 2a + 1)]x^2}{(a-1)x + bys} \\ &= \frac{-sb^2 + 2(a-1)x^2}{(a-1)x + bys} \\ &= \frac{2(a-1) + 2(a-1)sy^2 - sb^2}{(a-1)x + bys} > 0 \text{ (因為 } a > 1, y > b) \end{aligned}$$

推得

$$\begin{cases} 0 < x_0 < x \\ 0 < y_0 \\ x_0^2 - sy_0^2 = 1 \\ x_0 + y_0\sqrt{s} \text{ 不能表為 } (a+b\sqrt{s})^n \text{ 的形式。} \end{cases}$$

此與 (x, y) 是不能表為

$$x + y\sqrt{s} = (a+b\sqrt{s})^n$$

的形式，且離原點最近的正整數解矛盾；因此所有 $x^2 - sy^2 = 1$ 上的正整數解都能表為

$$x + y\sqrt{s} = (a+b\sqrt{s})^n$$

的形式。

習題 41.1　若一個正整數可表為

$$\frac{n(n+1)}{2}, \text{ (其中 } n \text{ 為正整數)}$$

的形式，則稱此正整數為三角形數。證明：既是三角形數，又是完全平方數的正整數有無窮多個。

習題 41.2　找一個正整數 n 使得：n 的所有正因數的平方和等於 $(n+3)^2$ 。[21]

[21] 考慮 $n = pq$，其中 p 與 q 是相異質數。

動手玩數學

若 $ABCDEF$ 是一個平行六邊形，即

$$AB // DE, BC // EF, CD // FA.$$

證明：三角形 ACE 與三角形 BDF 的面積相等。

挑戰題

試求所有邊長是正整數且面積恰與周長一樣的三角形。

達文波特定理

英國數學家達文波特有一個與 abc 猜想類似的結果。這個結果與多項式相關，敘述如下：

如果 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為實係數多項式且滿足 $f(x)^3-g(x)^2\neq 0$，則我們有

$$\deg(f(x)^3-g(x)^2)\geq \frac{1}{2}\deg f(x)+1.$$

讀者是否能用初等的方法證明這個已知的結果呢？